

Equation différentielles

1° Introduction

La résolution numérique des équations différentielles est très importante car les problèmes n'ont pas de solution analytiques. De nombreux problèmes de mécanique régis par de telles équations représentent souvent des phénomènes d'évolution temporelle.

Par exemple: $F_{ext} = M \ddot{\gamma}$ que l'on peut à un système équivalent du 1^{er} ordre

1^{er} ordre

$$F_{ext} = M \frac{d\gamma}{dt}$$

Cette équation différentielle est un problème classique connu sous le nom de Problème de CAUCHY

Problème de CAUCHY

Trouver $X(t)$ telle que ; $\frac{dX(t)}{dt} = F(t, X(t)) \quad \forall t \in [t_1, T]$

Condition initiale ou condition de CAUCHY

$$X(t_0) = \alpha_0 \in \mathbb{R}^4 \text{ donné}$$

2° Système différentiel linéaires

A/ Définition

$$F(t, X) = A(t) X + B(t)$$

$A(t)$ est une matrice (n, n)

$B(t)$ est un vecteur de $\mathbb{R}^n$ (2nd membre)

$$\frac{dX}{dt} - A(t) X = B(t)$$

Remarque :

$$\text{Si } B(t) = 0$$

Alors $\Rightarrow$ Système homogène

B/ Systèmes différentiel linéaires à coefficients constants

a) Définition

$$\frac{dX}{dt} = A X + B(t)$$

b) Exponentielle de matrice

1° Théorème et définitions

$\forall A$ matrice $(n \times n)$, la $\sum_{k=0}^{\infty} \|A\|^k / k!$ est normalement convergente

2° Par définition :

$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty} A^k / k!$$

3° Propriétés

- $e^0 = \text{Id}$
- $e^A = \text{Id} + A + A^2/2! + A^3/3! + \dots$
- $e^{A+B} = e^A \cdot e^B$
- $A e^A = e^A A$
- $\forall A, A$ est inversible et $(e^A)^{-1} = e^{-A}$
- $e^A \cdot e^{-A} = e^{A-A} = e^0 = \text{Id}$
- $t \Rightarrow X(t) = e^{tA} X(0)$

X est dérivable pour tout t et $dX/dt = A e^{tA} X(0)$

4° Théorème fondamentale

La solution du problème de CAUCHY (sans 2nd membre)

$$\begin{aligned}
 dX/dt &= AX \text{ et } X(t_0) = \alpha_0 \Rightarrow X(t) = e^{(t-t_0)A} \cdot \alpha_0 \\
 d/dt [e^{(1-t_0)A} \cdot \alpha_0] &= A [e^{(t-t_0)A} \alpha_0] \\
 X(t_0) &= e^{(t_0-t_0)A} \alpha_0 = e^0 \alpha_0 = \alpha_0
 \end{aligned}$$

5° Détermination pratique des solutions

- Calcul des valeurs propres de A
- Calcul de la solution

$$X(t) = \sum_{i=0}^n C_i e^{\lambda_i (t-t_0)} \cdot V_i$$

où

λ_i = Valeurs propres

V_i = vecteur propre

C_i = Constante d'intégration

Demo

$$\frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^n C_i e^{\lambda_i(t-t_0)} V_i \right) = \sum_{i=1}^n \lambda_i C_i e^{\lambda_i(t-t_0)} \cdot V_i = A X(t)$$

Or

$$\begin{aligned} (A - \lambda_i I) V_i &= 0 \\ A V_i &= \lambda_i V_i \\ &= A \sum_{i=1}^n C_i e^{\lambda_i(t-t_0)} V_i \\ &= A X(t) \end{aligned}$$

c) Avec le 2nd membre

⇒ « Variation de la constante »

$$X = e^{(t-t_0)A} \alpha_0(t)$$

$$\begin{aligned} \frac{dX}{dt} &= A e^{(t-t_0)A} \alpha + e^{(t-t_0)A} \frac{d\alpha}{dt} \\ &= AX + B(t) \end{aligned}$$

D'où

$$B(t) = e^{(t-t_0)A} \frac{d\alpha}{dt}$$

Donc

$$\alpha = \int_{t_0}^t e^{(t_0-s)A} \cdot B(s) ds + \alpha_{s_0}$$

D'où

$$X = e^{((t-t_0)A)} \left\{ \int_{t_0}^t e^{(t_0-s)A} \cdot B(s) ds + \alpha_{s_0} \right\}$$

Solution générale sans second membre

$$X = \alpha_0 e^{(t-t_0)A} + \int_{t_0}^t e^{((t-1)A)} B(s) ds$$

3° resolution numérique des équations différentielles d'ordre 1

A/ Introduction

On veut résoudre un problème de CAUCHY par voie numérique. Ces méthodes permettent de passer d'un état connu n à l'état suivant $n+1$ grâce à des discrétisations temporelles et/ou spatiales

Hypothèse : Existence, unicité, continue

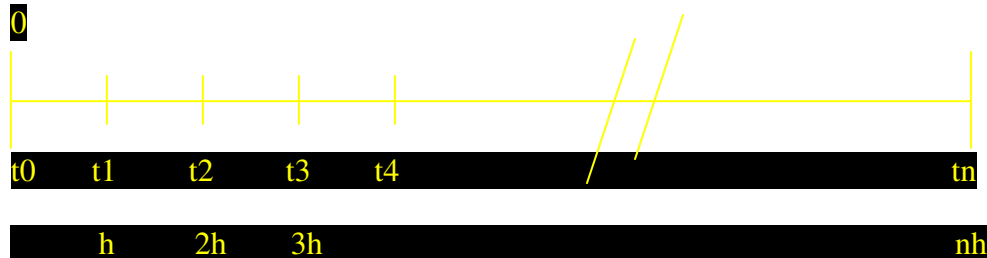
$$\frac{dx}{dt} = f(x, t)$$

$$x(t_0) = \alpha_0$$

a) Description du schema

$$Dx(t)/dt = f(t, x(t))$$

Car vérifie l'équation uniquement aux points t_i



$$h = (t_n - t_0)/n$$

$$dx(t_i)/dt = f(t_i, x(t_i))$$

On approxime

$$dx(t_i)/dt = (x(t_{i+1}) - x(t_i)) / h + \text{reste}$$

d'où

$$x(t_{i+1}) = x(t_i) + h (dx(t_i)/dt)$$
$$x(t_{i+1}) = x(t_i) + h f(t_i, x(t_i))$$

Algorithme

$$x(t_0) = \alpha_0$$
$$x(t_1) = x(t_0) + h f(t_0, x(t_0))$$
$$\vdots$$
$$x(t_n) = x(t_{n-1}) + h f(t_{n-1}, x(t_{n-1}))$$

L'approximation de la methode d'euler

Consiste donc à partir de $x(t_0) = \alpha_0$

De confondre la courbe et sa tangente sur un intervalle (t_i, t_{i+h})

b) Methode de Runge Kutta

A partir d'une valeur approchée x_i à t_i , ou calcul x_{i+1} à t_{i+1}

$$x_0 = \alpha_0$$
$$x_{i+1} = x_i + h \Phi(t_i, x_i, k)$$

$$\text{Euler } \Pi(t_i, x_i, k) = f(t_i, x_i)$$

1° Runge – kutta d'ordre 2

$$(x_{i+1} - x_i) / h = f(x_{i+1/2}, t_{i+1/2})$$

Mais

$$x_{i+1/2} = x_i(t_{i+1/2})$$

D'où estimation de $x_{i+1/2}$

$$X_{i+1/2} = x_i + h/2 f(x_i, t_i)$$

Algorithme

$$t_{i+1/2} = t_i + h/2$$

$$X_{i+1/2} = x_i + h/2 f(x_i, t_i)$$

$$X_{i+1} = x_i + h f(x_{i+1/2}, t_{i+1/2})$$

Formule d'ordre 2

(Pour calculer x_{i+1} on calcule 2 fois f)

Remarque

-facile à programmer car explicite

-La connaissance de x_0 suffit pour démarrer le calcul

-Ordre 2 (précision accrue)

2° Runge Kutta d'ordre 4

$$k_1 = f(x_i, t_i)$$

$$k_2 = f(x_{i+1/2}, t_{i+1/2})$$

$$k_3 = f(x_{i+1/2}, t_{i+1/2})$$

$$k_4 = f(x_{i+1}, t_{i+1})$$

$$x_{i+1} = x_i + h/6 (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

où

$$x_{i+1/2} = x_i + h/2 f(x_i, t_i)$$

$$x_{i+1/2} = x_i + h/2 f(x_{i+1/2}, t_{i+1/2})$$

$$x_{i+1} = x_i + hf(x_{i+1/2}, t_{i+1/2})$$

Soit 4 évaluations de f , c'est la méthode la plus utilisée

c) Méthode d'Adams (à pas multiples)

X_{i+1} est déterminé à partir de x_i , t_i et x_{i-1} , t_{i-1}

1°) Formule d'Adams ouverts

$$dx/dt = f(x,t)$$

$$x^{(0)} = \alpha_0$$

Développement de Taylor

$$x(t+h) = x(t) + h x'(t) + h^2/2 x''(t) + \dots$$

$$x'(t) = f(x,t)$$

$$x''(t) = f'(x,t)$$

$$x(t+h) \neq x(t) + hf + h^2/2 f' + h^3/3 f'' + \dots$$

α) formule d'ordre 1

$$X_{i+1} = x_i + hf \quad (\text{EULER})$$

β) formule d'ordre 2

On prend les trois premiers termes

$$x_{i+1} = x_i + hf_i + h^2/2 f'_i + \dots$$

$$\text{or } f(t-h) = f(t) - h f'(t) + \dots$$

$$f'(t) = (f(t) - f(t-h))/h$$

$$\text{d'où } x_{i+1} = x_i + hf + h^2/2 (f_i - f_{i-1})$$

$$\text{d'où } x_{i+1} = x_i + h/2(3f_i - f_{i-1}) \quad \text{ADAMS ORDRE 2}$$

γ) Formule d'ordre 3

$$x_{i+1} = x_i + h f_i + h^2/2 f'_i + h^3/3 f''_i + \theta(h^4)$$

On remplace alors f'_i et f''_i par des différences à gauche

$$f(t-h) = f(t) - hf'(t) + h^2/2 f''(t) + \theta(h^3)$$

$$f'(t) = (f(t) - f(t-h))/h + h/2 f''(t) + \theta(h^3)$$

$$\text{où } f''(t) = ?$$

$$f'_i(t) = (f_i - f_{i-1}) / h + h/2 f''_i$$

$$f(t-2h) = f(t) - 2hf'(t) + (2h)^2/2 f''(t) + \theta(h^3)$$

$$f(t-2h) - 2f(t-h) = -f(t) + h^2 f''(t) + \theta(h^3)$$

$$f''(t) = (f(t) + f(t-2h) - 2f(t-h))/h^2 + \theta(h)$$

$$f''_i = (f_{i-2} - f_{i-1} + f_i) / h^2 + \theta(h)$$

$$x_{i+1} = x_i + h/12 [24 f_i - 16 f_{i-1} + 5 f_{i-2}] + \theta(h^3)$$

2°) Méthode d'Adams fermée (Implicite)

On écrit un développement de Taylor en faisant apparaître f_{i+1} permettant alors d'obtenir un schéma IMPLICITE.

$$\begin{aligned}x(t-h) &= x(t) - hx'(t) + \frac{h^2}{2} x''(t) - \frac{h^3}{3!} x'''(t) + \dots \\x_i &= x_{i+1} - hx'_{i+1} + \frac{h^2}{2} x''_{i+1} - \frac{h^3}{3!} x'''_{i+1} + \dots \\x_{i+1} &= x_i + hx'_{i+1} - \frac{h^2}{2} x''_{i+1} + \frac{h^3}{3!} x'''_{i+1} - \dots\end{aligned}$$

ordre 2

Expression implicite

$$X_{i+1} = x_i + \frac{h}{2} (f_i + f_{i+1}) + \theta(h^3)$$

3°) Méthode de type prédiction correcteur

Les méthodes précédentes n'apportent aucune correction à l'évolution de x_{i+1}

X_{i+1} n'apparaît que dans une seule relation même si celle-ci est relativement complexe

L'idée est alors de prédire x_{i+1} puis ensuite de la corriger (2 étapes)

a) Méthode d'Euler modifiée

Prédiction

$$x_{i+1} = x_i + hf(x_i, t_i)$$

Correction

$$x_{i+1} = x_i + \frac{h}{2} (f(x_i, t_i) + f(x_{i+1}, t_{i+1}))$$

b) Adams prédiction correcteur

Prédiction

$$x_{i+1} = x_i + \frac{h}{24} (55f_i - 59f_{i-1} + 37f_{i-2} - 9f_{i-3})$$

Correction

$$x_{i+1} = x_i + \frac{h}{24} (9f_{i+1} + 19f_i - 5f_{i-1} + f_{i-2})$$

Equation aux dérivées partielles (EDP)

Differences finies